Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.

Problème 1

(D'après Maths C, Banque PT 2018)

Le but de ce problème est de montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$:

$$|f'(t)| \leqslant M.$$

2. Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty,k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t = 0.$$

Partie I

On définit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

4. Quelle valeur faut-il attribuer à $f(0)$ pour prolonger par continuité f sur $[0, +\infty[$?
   On désigne encore par f la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que, pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant 1$.
6. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
7. On définit la fonction F de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
   Montrer que, pour $x > 0$,

$$F(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

8. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

9. En utilisant le changement de variable $t = 2s$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\mathrm{d}t.$$

10. (a) Déterminer :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan t} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}$$

(b) Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

(c) Que vaut I_1 ?

(d) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :

$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$

en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.

(e) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

11. Étudier la convergence des intégrales J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$,

12. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

13. Que vaut : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n - I_n$? *On pensera à utiliser le Préambule.*

14. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

(on pourra utiliser un changement de variable).

15. Conclure

Problème 2

(adapté de Centrale 2015 et CCINP 2017)

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

Si f est un endomorphisme de E et F est un sous-espace vectoriel de E on dit que F est stable par f lorsque

$$\forall x \in F, \qquad f(x) \in F$$

Pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f, c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F.

Partie I — Quelques généralités

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. (a) Montrer que E, $\{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces stables par f.
   (b) Montrer que, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces stables par f alors $F_1 + F_2$ l'est également.
2. (a) Soit $x \in E$ non-nul et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$, montrer que $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par f.
   (b) Réciproquement montrer que, si $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par f, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
   (c) Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace stable par f
   (d) Montrer que s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \geqslant 2$, alors il existe une infinité de droites de E stables par f.
3. (a) Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
   On pourra considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (y, -x)$.
   (b) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
   (c) Déterminer les sous-espaces stables de l'endomorphisme canoniquement associé à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
4. On suppose **dans cette question uniquement** que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f.

   Soit x et y deux vecteurs non nuls de E
   (a) Montrer que si x et y sont colinéaires, alors il existe un réel α tel que $f(x) = \alpha x$ et $f(y) = \alpha y$.
   (b) Montrer que si (x, y) est libre, alors il existe un réel α' tel que $f(x+y) = \alpha'(x+y)$ et $f(y) = \alpha' y$ et $f(x) = \alpha' x$.
   (c) Que dire alors de f ?

Partie II — Un exemple en dimension 3

On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

5. Montrer que $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{-1, 1\}$.
6. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A + I_3)) = 1$ et déterminer une base w de $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$
7. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 2$ et déterminer une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{Id})$
8. Déterminer six espaces stables par φ différent de $\mathbb{R}^3$ et $\{(0, 0, 0)\}$; on explicitera une base de chacun de ces espaces à l'aide des vecteurs v_1, v_2 et w.

Partie III — Quelques exemples géométriques

9. Pour cette question uniquement on prendra $E = \mathbb{R}^2$.

   Déterminer à l'aide de considérations **géométriques** les **droites stables** ainsi que leur nombre des endomorphismes suivants :
   (a) La symétrie par rapport à la droite D_1 d'équation $x + y = 0$ parallèlement à la droite D_2 d'équation $x - y = 0$.
   (b) La rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ dans le sens trigonométrique direct.
   (c) L'homothétie de rapport 2.

Partie IV

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, tel qu'il existe un entier p et un p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts vérifiant

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $E_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_E)$ et $E_i \neq \{0_E\}$.

10. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

    (a) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est stable par f.

    (b) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F.

    Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

    (c) Si on pose $H_x = \{i \in [\![1, p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les espaces vectoriels E_i, on peut supposer que $H_x = [\![1, r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1, r]\!]$.

    On pose $V_x = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.

    Montrer que $\mathscr{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x.

    (d) Montrer que pour tout j de $[\![1, r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$.

    (e) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

    (f) En déduire que pour tout i de $[\![1, r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

11. Dans cette question, on se place dans le cas où $p = n$.

    (a) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1, p]\!]$.

    (b) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

    (c) Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

    (d) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.